Théorème de Fourier-Plancherel

Théorème 1 (Fourier-Plancherel)**.**

(i) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, alors $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $\left\|\hat{f}\right\|_2 = \|f\|_2$.

(ii) La transformée de Fourier définie sur $L^1 \cap L^2$ se prolonge en une unique application $\mathcal{F}$ sur L^2, proportionnelle à une isométrie, appelé transformée de Fourier-Plancherel.

Démonstration.

(i) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. On note $\tilde{f} : x \mapsto \overline{f(-x)}$ et $g = f * \tilde{f}$.

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\tilde{f}(y)dy = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\overline{f(-y)}dy = \int_{\mathbb{R}} f(x+y)\overline{f(y)}dy = \langle\, f_{-x}\,,\, f\,\rangle_{L^2}$$

où, f_{-x} est la translatée de f. Ainsi, g est uniformément continue et $g(0) = \|f\|_2^2$. De plus :

$$\hat{\tilde{f}}(x) = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(-t)}e^{-ixt}dt = \overline{\int_{\mathbb{R}} f(u)e^{-ixu}du} = \overline{\hat{f}(x)} \qquad \text{puis} \qquad \hat{g} = \widehat{f * \tilde{f}} = \hat{f}\hat{\tilde{f}} = \left|\hat{f}\right|^2$$

Comme f et $\tilde{f}$ sont dans L^1, alors $\|g\|_1 = \left\|f * \tilde{f}\right\|_1 \leqslant \|f\|_1 \left\|\tilde{f}\right\|_1 = \|f\|_1^2$.

On a également $\|g\|_\infty = \left\|f * \tilde{f}\right\|_\infty \leqslant \|f\|_2 \left\|\tilde{f}\right\|_2 = \|f\|_2^2$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose $\phi_n(t) = e^{-\frac{|t|}{n}}$. On a alors, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\varphi_n(x) = \frac{1}{2\pi}\widehat{\phi_n}(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|t|}{n}-ixt}dt = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{\mathbb{R}^-} e^{\frac{t}{n}-ixt}dt + \int_{\mathbb{R}^+} e^{-\frac{t}{n}-ixt}dt\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\frac{1}{n}-ix} - \frac{1}{-\frac{1}{n}-ix}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{n}{1-inx} + \frac{n}{1+inx}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{n}{1+n^2x^2}
\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$(\varphi_n * g)(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(y)g(-y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \phi_n(t)e^{-iyt}g(-y)\,dt\,dy$$

Or, on a :

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |\phi_n(t)|\left|e^{-iyt}\right||g(-y)|\,dt\,dy = \|\phi_n\|_1\,\|g\|_1 < +\infty$$

Donc, par Fubini, on a :

$$(\varphi_n * g)(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \phi_n(t)\int_{\mathbb{R}} e^{-iyt}g(-y)\,dy\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \phi_n(t)\overline{\hat{g}(t)}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \phi_n(t)\left|\hat{f}\right|^2 dt$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par uniforme continuité de g, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| < \eta$ implique $|g(x) - g(0)| < \varepsilon$, alors :

$$\begin{aligned}
|(\varphi_n * g)(0) - g(0)| &= \left|\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(y)g(-y)\,dy - \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(y)g(0)\,dy\right| \\
&\leqslant \underbrace{\int_{-\eta}^{\eta} \varphi_n(y)\,|g(-y)-g(0)|\,dy}_{\leqslant \varepsilon} + \underbrace{\int_{|y|>\eta} \varphi_n(y)\,|g(-y)-g(0)|\,dy}_{\leqslant 2\|g\|_\infty \int_{|y|>\eta}\varphi_n(y)\,dy \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}
\end{aligned}$$

Il existe donc un rang à partir duquel $|(\varphi_n * g)(0) - g(0)| \leqslant 2\varepsilon$. Ainsi $\lim\limits_{n\to\infty}(\varphi_n * g)(0) = g(0)$.

Par convergence monotone, comme $0 \leqslant \phi_n(t) \left|\hat{f}\right|^2 \leqslant \phi_{n+1}(t) \left|\hat{f}\right|^2$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} (\varphi_n * g)(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi_n(t) \left|\hat{f}\right|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} \phi_n(t) \left|\hat{f}\right|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left|\hat{f}\right|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \left\|\hat{f}\right\|_2^2$$

Finalement, on a $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, et :

$$\|f\|_2^2 = g(0) = \lim_{n\to\infty} (\varphi_n * g)(0) = \frac{1}{2\pi} \left\|\hat{f}\right\|_2^2$$

(ii) On désigne par Y l'espace de toutes les transformées de Fourier des fonctions de $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$.
On vient de démontrer que $Y \subset L^2(\mathbb{R}^d)$. Montrons que Y est dense dans L^2, autrement dit que $Y^\perp = \{0\}$.
Pour tout réel α, et tout $n \in \mathbb{N}^\star$, les fonctions $x \mapsto 2\pi e^{i\alpha x}\phi_n(x)$ sont dans $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, et leurs transformée de Fourier sont les fonctions $t \mapsto \varphi_n(\alpha - t)$ qui sont dans Y.
Soit $w \in L^2(\mathbb{R}^d)$. On suppose $w \in Y^\perp$, alors, pour tout réel α, on a :

$$(\varphi_n * w)(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(\alpha - t) w(t)\, dt = 0$$

On en déduit alors que $w = 0$ et ainsi Y est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

On note $\Phi : f \mapsto \hat{f}$. On a démontré jusqu'ici que Φ est une application d'un sous-espace dense de $L^2(\mathbb{R}^d)$, en fait $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ sur un autre, en fait Y. On en déduit que Φ peut se prolonger en une application $\tilde{\Phi}$ de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même.

□

Conclusion. La transformée de Fourier peut être étendue de $L^1(\mathbb{R}^d)$ à $L^2(\mathbb{R}^d)$. ◁

Références

[Rud] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe.* Dunod